

LNF - 66/25
10 Maggio 1966

A. Tenore : EFFETTI DI UN CAMPO MAGNETICO LONGITU-
DINALE SULLE PROPRIETA' DEI FASCI IN ADONE.

(Nota interna : n. 321)

Nota interna: n. 321
10 Maggio 1966

A. Tenore: EFFETTI DI UN CAMPO MAGNETICO LONGITUDINALE
SULLE PROPRIETA' DEI FASCI IN ADONE.

In alcune delle esperienze eseguibili con Adone è necessario l'uso di campi magnetici per poter analizzare in momento le particelle finali della reazione. Il campo magnetico deve essere posto in prossimità della zona di interazione e, trovandosi questa all'interno della ciambella, sorge il problema degli effetti di tale campo sul moto delle particelle accumulate.

Naturalmente il campo che qui interessa è quello presente nella zona di passaggio dei fasci: non ci occuperemo quindi di quelle disposizioni magnetiche che diano un campo nullo in questa zona, nè della loro realizzabilità pratica.

Il campo che prenderemo in esame in questa nota è un campo magnetico orientato lungo la traiettoria dei fasci, e che supporremo presente su una delle sezioni dritte sperimentali di Adone. Questa forma di campo (che si può realizzare con un solenoide avvolto attorno alla ciambella) è praticamente l'unica che, anche con intensità abbastanza elevate, possa essere tollerata dalla macchina senza doverne modificare radicalmente la struttura.

Di questo campo studieremo gli effetti sui fasci circolanti e le limitazioni in intensità che ne conseguono. Riassumiamo brevemente i ri-

sultati.

Oltre ad un effetto di accoppiamento fra le oscillazioni di betatrone radiale e verticale, che provoca un aumento delle dimensioni verticali del fascio, si ha una variazione delle frequenze di betatrone. E' questo l'effetto più importante per quanto riguarda la stabilità della macchina. Il limite di intensità è comunque, da questo punto di vista, piuttosto elevato: non si hanno infatti conseguenze pericolose fino a campi dell'ordine di 30.000 gauss su circa 2.5 metri di lunghezza, alla massima energia (1.5 GeV).

Se però si vuole contemporaneamente l'incrocio ad angolo, ottenibile con opportuni campi elettrici disposti lungo la ciambella, si vede che l'effetto combinato dei due campi separa radialmente i due fasci (di elettroni e di positroni). Questo porta a forti limitazioni, e non sono tollerabili campi superiori a qualche Kilogauss.

Per tentare di ovviare questo grave inconveniente abbiamo studiato disposizioni in cui il campo magnetico ha direzioni opposte sulle due metà della sezione dritta:

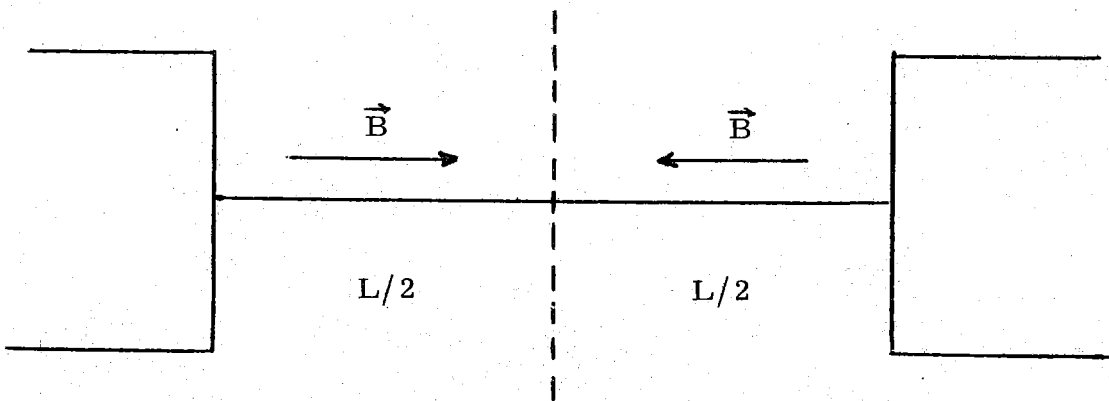


FIG. 1a

oppure :

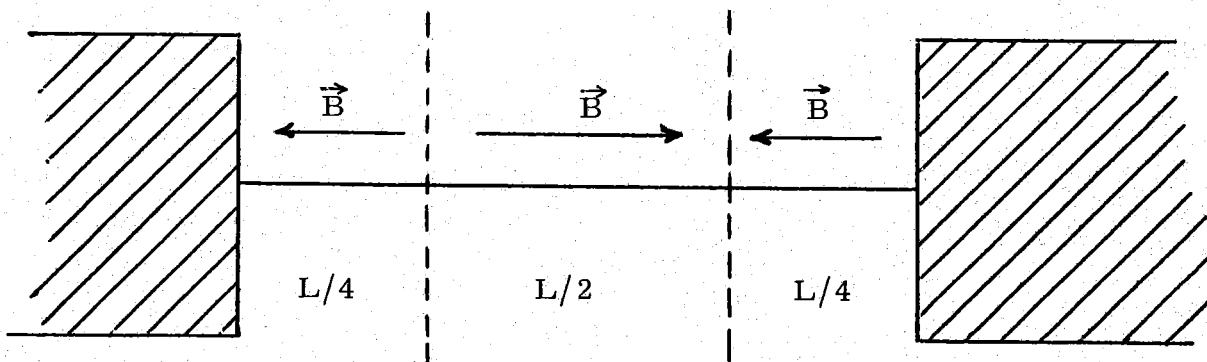


FIG. 1b

In ambedue questi casi l'aggiunta di campi elettrici per ottenere l'incrocio ad angolo non porta a separazione radiale dei fasci e le limitazioni (dovute alla stabilità della macchina) divengono di ~ 40.000 Gauss, sempre alla energia massima e con $L \cong 2,5$ metri.

L'argomento è suddiviso nella maniera seguente.

Nel paragrafo 1 si studiano i limiti di stabilità della macchina, dipendenti dalla intensità del campo.

Il paragrafo 2 è dedicato alle dimensioni del fascio. Nel paragrafo 3 i calcoli saranno eseguiti nel caso di incrocio ad angolo ed infine nel paragrafo 4 studieremo le configurazioni più complicate prima viste (figure 1a, 1b).

§ 1) -

Assumeremo, come di consueto, il sistema di riferimento mobile avente come origine degli assi la posizione di una particella di energia sincrona E_s . L'ascissa curvilinea sull'orbita di riferimento verrà indicata con s .

Ugualmente le velocità (che si intenderanno sempre misurate in unità c) saranno riferite alla velocità della particella sincrona. Per le coordinate e velocità radiali useremo rispettivamente i simboli X, X' ; per quelle verticali Z, Z' . Con Y indicheremo il quadrivettore (X, X', Z, Z') .

Chiameremo inoltre R la matrice totale di trasferimento radiale e V quella verticale, in assenza del campo magnetico longitudinale; la loro forma esplicita è (1):

$$R = \begin{vmatrix} \cos \mu_R + \alpha_R \sin \mu_R & \beta_R \sin \mu_R \\ -\gamma_R \sin \mu_R & \cos \mu_R - \alpha_R \sin \mu_R \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\gamma_R = \frac{1 + \alpha_R^2}{\beta_R'}$$

La V si ottiene dalle R con la sostituzione dell'indice R con l'indice V .

I moti radiale e verticale sono (almeno nel caso di macchina ideale, senza errori) indipendenti, cosicchè la relazione fra il vettore Y_0 associato ad una particella ed il vettore Y associato alla stessa particella dopo che ha percorso un giro nella macchina è data dalla trasformazione:

$$Y = A Y^0 = \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & V \end{vmatrix} Y^0 \quad (2)$$

4.

Naturalmente la matrice A dipende dal punto s scelto sulla orbita di riferimento, anche se non vi dipendono μ_R e μ_V .

Supponiamo ora che su una delle sezioni dritte di incrocio, di lunghezza L , vi sia un campo magnetico longitudinale uniforme, di intensità costante H . Sia T la matrice di trasferimento relativa.

Se con \mathcal{L} indichiamo la matrice associata ad un tratto dritto di lunghezza L :

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

la nuova matrice totale di macchina calcolata nel punto finale della sezione dritta s_0 è:

$$M(s_0) = T \mathcal{L}^{-1} A(s_0) \quad (3)$$

Il primo problema consiste nel calcolo degli autovalori di M in funzione dell'intensità del campo magnetico H ed in particolare hanno interesse, ai fini della stabilità della macchina, i moduli degli autovalori.

Calcoliamo ora esplicitamente la matrice T .

Le equazioni del moto di una particella carica in un campo magnetico assiale uniforme e costante nel tempo sono:

$$X = X_0 + \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t + \delta) - \frac{v_0}{\omega} \cos \delta$$

$$X' = -\frac{v_0}{c} \sin(\omega t + \delta) \quad (4)$$

$$Z = Z_0 + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + \delta) - \frac{v_0}{\omega} \sin \delta$$

$$Z' = \frac{v_0}{c} \cos(\omega t + \delta)$$

dove:

$$\omega = \frac{eH}{mc} = \frac{eH}{\gamma m_0 c} \quad ; \quad \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \quad (5)$$

$$v_0 = c \sqrt{X'^2 + Z'^2}$$

e δ è una costante determinata dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} X'_0 &= \frac{v_0}{c} \sin \delta \\ Z'_0 &= \frac{v_0}{c} \cos \delta \end{aligned} \quad (6)$$

Sostituendo le (6) nelle (4) e ponendo $t = L/c$ si ha la relazione fra i vettori all'inizio ed alla fine del tratto di campo magnetico:

$$X = X_0 + \frac{c}{\omega} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) X'_0 + \frac{c}{\omega} (\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) - 1) Z'_0$$

$$X' = \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) X'_0 - \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) Z'_0$$

$$Z = \frac{c}{\omega} (1 - \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right)) X'_0 + Z_0 + \frac{c}{\omega} \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) Z'_0$$

$$Z' = \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) X'_0 + \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) Z'_0$$

La matrice di trasferimento corrispondente è:

$$T' = \begin{vmatrix} 1 & \frac{S}{2Q} & 0 & \frac{C-1}{2Q} \\ 0 & C & 0 & -S \\ 0 & \frac{1-C}{2Q} & 1 & \frac{S}{2Q} \\ 0 & S & 0 & C \end{vmatrix}$$

dove abbiamo posto per comodità:

$$S = \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad C = \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad Q = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c}$$

In questo modo però si sono completamente trascurati gli effetti di bordo del solenoide. Ciò non è corretto, perchè l'equazione di Maxwell:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

6.

non permette che un campo longitudinale termini bruscamente; le linee di forza infatti non si richiudono. Dal punto di vista analitico questo si traduce nel fatto che la matrice T' , e quindi la matrice totale di macchina, non è simplettica (per la definizione e per il significato della simpletticità vedi (1)), condizione questa che deve soddisfare invece ogni matrice di trasferimento. Qui vogliamo solo far notare che il trascurare il fringing porta ad un risultato fisicamente assurdo, cioè che la macchina è instabile per qualsiasi valore di H .

Per tener conto degli effetti di bordo, ci serviremo dell'approssimazione di lente sottile. In questa approssimazione la matrice di un fringing si scrive:

$$F_{\pm} = I + \Gamma$$

con:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Il segno + o - si riferisce al fringing rispettivamente in uscita e in ingresso del solenoide.

In definitiva l'effetto totale del campo magnetico è rappresentato dalla matrice:

$$T = F_+ T' F_- = \begin{vmatrix} \frac{1+C}{2} & \frac{S}{2Q} & -\frac{S}{2} & \frac{C-1}{2Q} \\ -\frac{SQ}{2} & \frac{1+C}{2} & \frac{(1-C)Q}{2} & -\frac{S}{2} \\ \frac{S}{2} & \frac{1-C}{2Q} & \frac{1+C}{2} & \frac{S}{2Q} \\ \frac{(C-1)Q}{2} & \frac{S}{2} & -\frac{SQ}{2} & \frac{1+C}{2} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Si verifica subito che, come deve essere,

$$\lim_{H \rightarrow 0} T = \mathcal{L}$$

Inoltre T è simplettica, ed in particolare $\det T = 1$; essendo poi simpletti che A , \mathcal{L}^{-1} , di questa stessa proprietà gode la matrice totale M .

Siano ora $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, gli autovalori di M , e Λ la matrice diagonale che si ottiene da M con una trasformazione di similarità:

$$\begin{aligned} U^{-1} M U &= \Lambda \\ \Lambda_{ik} &= \lambda_k \delta_{ik} \end{aligned} \quad (8)$$

Dalle (8) si può ottenere una espressione per le potenze di M che sarà molto utile nel seguito.

Si ha infatti:

$$M = U \Lambda U^{-1}$$

da cui:

$$\begin{aligned} M^n &= U \Lambda^n U^{-1} \\ (M^n)_{ik} &= \sum_{\rho, \sigma}^{1,4} U_{i\rho} \lambda_\rho^n \delta_{\rho\sigma} U_{\sigma k}^{-1} = \sum_{\rho}^{1,4} \lambda_\rho^n V_{ik}^{(\rho)} \end{aligned} \quad (9)$$

con:

$$V_{ik}^{(\rho)} = U_{i\rho} U_{\rho k}^{-1} \quad (10)$$

Le $V^{(\rho)}$ sono matrici costanti, quindi la dipendenza di M^n da n numero dei giri di macchina, è determinata solo dalle quantità λ_ρ^n .

Si può dimostrare⁽¹⁾ che, se una matrice simplettica ammette λ come autovalore, anche $1/\lambda$ deve essere un autovalore. Quindi, nel nostro caso, o tutti e quattro i λ_ρ hanno modulo 1, oppure ve ne sarà almeno uno con modulo > 1 . In questo secondo caso, come si vede immediatamente dalla (9):

$$M^n \rightarrow \infty \quad \text{per} \quad n \rightarrow \infty.$$

Si ha cioè l'instabilità della macchina.

Sfruttiamo ora il fatto che gli autovalori sono a coppie l'uno l'inverso dell'altro per introdurre le quantità:

$$\begin{aligned} \cos \mu_1 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \\ \cos \mu_2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} \right) \end{aligned}$$

8.

avendo posto $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1}$, $\lambda_4 = \frac{1}{\lambda_2}$

La condizione che $|\lambda_\rho| = 1$ per $\rho = 1, \dots, 4$ si traduce nella condizione che $\cos \mu_1, \cos \mu_2$ siano reali, ovvero che:

$$\left| \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right| \leq 2 \quad \left| \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} \right| \leq 2 \quad (11)$$

In questo caso si ha ovviamente:

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1} = \lambda_1^x, \quad \lambda_4 = \frac{1}{\lambda_2} = \lambda_2^x \quad (12)$$

Le (11) sono dunque le condizioni di stabilità della macchina.

Naturalmente non si può più parlare di moti radiale e verticale indipendenti. Definiamo ugualmente due frequenze ν_1 e ν_2 :

$$\nu_1 = \frac{\mu_1}{2\pi} \quad \nu_2 = \frac{\mu_2}{2\pi}$$

e indicheremo con ν_R quella delle due che per campo tendente a zero tende alla frequenza di betatrone radiale della macchina, e con ν_V quella che tende alla frequenza verticale.

Eseguendo i calcoli con i parametri di Adone all'energia massima (1.5 GeV) e supponendo che il campo magnetico sia presente su tutta la sezione dritta (metri 2.664) l'instabilità si raggiunge a ~ 32.000 Gauss: per valori superiori la (11) non è più rispettata, e precisamente ciò avviene quando ν_R crescendo passa per il valore 3.5.

La variazione delle frequenze è riportata nel grafico 1 e come si vede, almeno per valori non troppo alti del campo magnetico, è piuttosto lenta.

§ 2) - DIMENSIONI DEL FASCIO -

In questo paragrafo ci proponiamo di discutere come influisce l'accoppiamento introdotto dal campo magnetico assiale sulla distribuzione delle particelle nei bunches del fascio. Ci limiteremo a considerazioni qualitative senza affrontare, a causa della sua complessità, il problema del calcolo esatto delle dimensioni del fascio^(x).

(x) - Il calcolo delle dimensioni in generale è in corso di esecuzione presso il gruppo Adone.

E' naturale aspettarsi che l'accoppiamento modifichi sensibilmente il rapporto verticale-radiale della sezione trasversa del fascio: a questo proposito ricordiamo⁽²⁾ che in assenza del campo magnetico che stiamo considerando questo rapporto è molto piccolo ($\sim 1\%$), anzi è praticamente determinato dai piccoli accoppiamenti dovuti agli errori di allineamento della macchina⁽³⁾.

Cominciamo col considerare solo le oscillazioni di betatrone. Supponiamo di avere inizialmente una particella che abbia uno spostamento unitario nella direzione radiale. Il vettore corrispondente a questa particella è:

$$Y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Y_k^0 = \delta_{1k} \quad (13)$$

Questo spostamento si può pensare dovuto alla emissione di un fotone (radiazione di sincrotrone) che provoca una brusca variazione della energia della particella e quindi, come vedremo in seguito, della orbita chiusa attorno a cui avvengono le oscillazioni di betatrone. In effetti l'ipotesi che l'eccitazione avvenga sul piano radiale è valida solo in assenza di accoppiamento: i calcoli che seguono sono quindi puramente indicativi e, nondimeno, posso servire a dare un'idea dell'entità dell'accoppiamento.

Riprendiamo l'ultima delle equazioni (9): dopo n giri di macchina il vettore Y^0 è diventato:

$$Y_i = (M^n Y^0)_i = \sum_{\rho, k}^{1,4} \langle V_{ik}^{(\rho)} \delta_{k1} \rangle^n \quad (14)$$

Se calcoliamo il valor medio rispetto ad n di $Y_1^2 \equiv X^2$ e di $Y_3^2 \equiv Z^2$, per n molto grande, possiamo avere una stima del rapporto fra i valori quadratici medi delle dimensioni trasverse, sempre con eccitazioni delle oscillazioni di betatrone del tipo (13).

Dalle (12), (14) e notando che per le (9) e per la realtà di M

$$V^{(3)} = V^{(1)*} \quad e \quad V^{(4)} = V^{(2)*}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \langle Y_i^2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_{\rho, k}^{1,4} \langle V_{ik}^{(\rho)} \delta_{k1} \rangle^n \right)^2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(2 \operatorname{Re} \left[\sum_{\rho}^{1,2} e^{ni\mu\rho} V_{i1}^{(\rho)} \right] \right)^2 \right\rangle = \end{aligned}$$

$$= 4 \left\langle \left(\sum_{\rho}^{1,2} \left[\cos n_{\rho} \operatorname{Re} V_{i1}^{(\rho)} - \sin n_{\rho} \operatorname{Im} V_{i1}^{(\rho)} \right] \right)^2 \right\rangle = 2 \sum_{\rho}^{1,2} \left| V_{i1}^{(\rho)} \right|^2$$

Abbiamo dunque:

$$R_{ac} \equiv \sqrt{\frac{\langle Z^2 \rangle}{\langle X^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{\sum_{\rho}^{1,2} \left| V_{31}^{(\rho)} \right|^2}{\sum_{\rho}^{1,2} \left| V_{11}^{(\rho)} \right|^2}}$$

Il grafico 2 riporta l'andamento di R_{ac} (che, si badi bene, non rappresenta il rapporto delle dimensioni) in funzione del campo. Aggiungiamo che se invece si suppone di avere inizialmente un vettore $(0, 1, 0, 0)$ (che corrisponde ad uno scostamento iniziale in velocità) otteniamo per R_{ac} gli stessi valori che nel caso precedente.

Vogliamo ora prendere in considerazione l'effetto delle oscillazioni di sincrotrone.

Le equazioni del moto per particelle di energia sincrona E_s possono scriversi in generale, anche in presenza di accoppiamento:

$$\begin{aligned} L_X (Y, Y') &= 0 \\ L_Z (Y, Y') &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Quando invece l'energia della particella E è diversa da E_s a secondo membro delle (15) compaiono termini disomogenei:

$$\begin{aligned} L_X (Y, Y') &= F_X(s) \\ L_Z (Y, Y') &= F_Z(s) \end{aligned} \tag{16}$$

Le soluzioni delle (16) sono della forma:

$$\begin{aligned} X(s) &= X_{\beta}(s) + p \xi(s) \\ Z(s) &= Z_{\beta}(s) + p \zeta(s) \end{aligned} \tag{17}$$

dove:

$$p = \frac{E - E_s}{E_s}$$

X_{β} , Z_{β} sono le soluzioni delle (15) e $p \xi$, $p \zeta$ sono soluzioni particolari delle (16). $\xi(s)$ e $\zeta(s)$ sono funzioni periodiche di s con periodo pari alla periodicità della macchina; la dipendenza lineare da p della soluzione

particolare è dovuta all'analogia dipendenza lineare da p di $F_X, F_Z^{(2)}$.

Dalle (17) si vede che le particelle non sincrone compiono oscillazioni di betatrone attorno a centri spostati rispetto all'orbita di riferimento: e questi centri giacciono sulla curva di equazioni (ponendo $p = 1$):

$$\begin{aligned} X &= \xi(s) \\ Z &= \zeta(s) \end{aligned} \quad (18)$$

che è appunto l'orbita chiusa perturbata.

Per p costante le dimensioni del fascio sono date naturalmente dai valori quadratici medi di X_{β} e Z_{β} , solo che il centro della distribuzione si troverà spostato sulla orbita chiusa corrispondente.

Però a causa delle oscillazioni di sincrotrone (che non sono altro che le oscillazioni di p) si ha nel fascio una distribuzione in p . Vediamo come questo influisce sulle dimensioni esaminando dapprima il caso di accoppiamento nullo.

In questo caso $\zeta(s) = 0$ e l'orbita chiusa giace nel piano radiale. Le dimensioni verticali non variano, mentre quelle radiali si ottengono componendo quadraticamente la distribuzione radiale dovuta alle oscillazioni di betatrone e quella dovuta alle oscillazioni di sincrotrone. Infatti, poichè le frequenze di betatrone e di sincrotrone sono incorrelate:

$$\langle X^2 \rangle = \langle (X_{\beta} + p\xi)^2 \rangle = \langle X_{\beta}^2 \rangle + \xi^2 \langle p^2 \rangle$$

Inoltre in Adone:

$$\xi^2 \langle p^2 \rangle \sim \langle X_{\beta}^2 \rangle$$

e questa relazione si può supporre approssimativamente valida lungo tutta la macchina perchè $\xi(s)$ varia poco.

Per riassumere, nel caso di accoppiamento nullo il rapporto effettivo $\langle Z^2 \rangle / \langle X^2 \rangle$ differisce dal rapporto calcolato tenendo conto solo delle oscillazioni di betatrone per un fattore che possiamo prendere grossolanamente $\sim 1/2$.

In presenza di accoppiamento tutto questo in generale non è più vero. L'orbita chiusa è una curva sghemba e le oscillazioni di sincrotrone non avvengono più sul piano radiale ma lungo rette di equazione:

$$Z = \sigma(s)X; \quad \sigma(s) = \frac{\zeta(s)}{\xi(s)} \quad (19)$$

la cui direzione varia da punto a punto dell'orbita; la funzione $\sigma(s)$ è riportata nel grafico 3. Tutto questo porta a due conseguenze.

Innanzitutto, come accennavamo all'inizio del paragrafo, la variazione di energia per emissione di fotoni produce uno spostamento dell'orbita chiusa lungo una direzione variabile da punto a punto della traiettoria e quindi in generale si avrà eccitazione tanto delle oscillazioni di betatrone radiali quanto delle verticali; cosicchè il rapporto fra le dimensioni (per quanto riguarda le sole oscillazioni di betatrone) dipenderà dalla funzione $\sigma(s)$.

E' chiaro infatti che se una particella emette un fotone nel punto s , il vettore corrispondente a questa particella non è più dato dalla (13) ma è proporzionale al vettore:

$$Y^0(s) = \xi(s) Y_R^0 + \zeta(s) Y_V^0$$

$$\text{dove } Y_R^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_V^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Volendo fare un calcolo simile ad precedente, le formule (14) e seguenti vanno modificate di conseguenza:

$$Y_i(s) = \sum_{\rho, k}^{1, 4} \lambda_{\rho}^n V_{ik}^{(\rho)} (\xi(s) \delta_{k1} + \zeta(s) \delta_{k3})$$

$$\langle Y_i^2(s) \rangle = 2 \sum_{\rho}^{1, 2} \left| \xi(s) V_{i1}^{(\rho)} + \zeta(s) V_{i3}^{(\rho)} \right|^2$$

e si può ottenere il rapporto delle dimensioni eseguendo opportune medie su s lungo tutta la macchina.

Come seconda conseguenza si ha che la distribuzione dovuta alle oscillazioni di sincrotrone non è più sul piano radiale, ma lungo la retta di equazione (19); l'ampiezza quadratica media di questa distribuzione è naturalmente data da $\langle p^2 \rangle (\xi^2(s) + \zeta^2(s))$.

Per ottenere le dimensioni totali occorrerà comporre quest'ultima ampiezza con le $\langle X_{\lambda}^2 \rangle$ e $\langle Z_{\lambda}^2 \rangle$, ed ora naturalmente non si potrà più parlare di dimensione verticale e radiale, ma di dimensioni secondo due nuovi assi perpendicolari la cui orientazione dipende ovviamente da $\sigma(s)$.

Si può osservare che, come si vede dal grafico 3, per campi di sufficiente intensità vi è, dovuta alla emissione di fotoni, una sorgente di oscillazioni di betatrone verticali paragonabile a quella delle oscillazioni radiali: questo, unitamente all'effetto dell'accoppiamento fra le due oscillazioni (vedi grafico 2) permette di prevedere che la sezione trasversa del fascio è praticamente circolare (sempre per campi di intensità abbastan-

za elevata).

§ 3 - INCROCIO AD ANGOLO. -

E' stata prevista in Adone la possibilità di ottenere un incrocio ad angolo (nel piano verticale) fra i due fasci⁽⁴⁾, allo scopo di meglio determinare spazialmente la zona di interazione. Questo può essere ottenuto disponendo opportunamente campi elettrici lungo la ciambella.

La presenza dei campi elettrici introduce termini non omogenei nelle equazioni del moto: e come si è visto nel paragrafo precedente questo comporta un'orbita chiusa perturbata.

Ciò si può esprimere anche col formalismo matriciale: la relazione fra il vettore di una particella e il vettore della stessa particella dopo un giro di macchina non è più una trasformazione lineare ma una relazione non omogenea:

$$Y = AY^0 + \bar{Y}$$

dove A è data dalla (2) e \bar{Y} dipende dai campi elettrici.

L'orbita chiusa si può ottenere risolvendo l'equazione lineare:

$$Y_{O.C.} = A Y_{O.C.} + \bar{Y} \quad (20)$$

che esprime la periodicità su un giro delle funzioni di orbita chiusa $\mathcal{Y}_{O.C.}(s)$, $\mathcal{Y}'_{O.C.}(s)$ e delle loro derivate.

La soluzione della (20) è:

$$Y_{O.C.} = (1-A)^{-1} \bar{Y} \quad (21)$$

L'incrocio ad angolo si vuole in verticale, dunque \bar{Y} e quindi $Y_{O.C.}$ (si ricordi la (2)) hanno solo le componenti Z, Z' diverse da zero. Si ha così, per le traiettorie in una sezione dritta sperimentale, la situazione della figura 2.

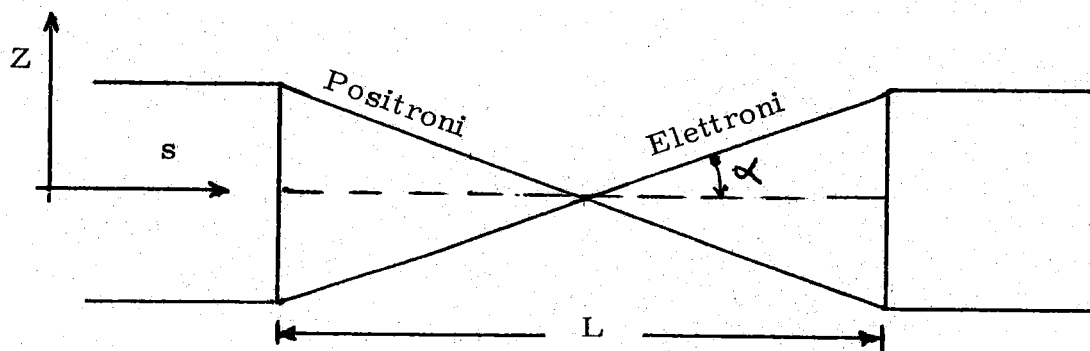


FIG. 2

In questo modo si ottiene l'orbita chiusa in un punto fissato s_0 : per avere $Y_{O.C.}$ in un qualsiasi punto basta per uso della relazione:

$$Y_{O.C.}(s) = A(s, s_0) Y(s_0) + \bar{Y}(s, s_0)$$

dove $A(s, s_0)$ è la matrice di trasferimento da s_0 a s e $\bar{Y}(s, s_0)$ è il termine disomogeneo dovuto al campo elettrico presente nel tratto (s_0, s) .

Supponiamo ora che contemporaneamente ai campi elettrici per lo incrocio ad angolo vi sia anche il campo magnetico longitudinale.

La (20) diventa:

$$Y = MY + T \mathcal{L}^{-1} \bar{Y}$$

e la (21):

$$Y_{O.C.}^H = (1 - M)^{-1} T \mathcal{L}^{-1} \bar{Y}$$

Ora $Y_{O.C.}^H$ ha tutte e quattro le componenti diverse da zero, cioè anche l'orbita chiusa radiale è perturbata.

L'effetto più importante è che gli scostamenti delle orbite chiuse dell'orbita di riferimento sul piano radiale sono di segno opposto per elettroni e positroni^(x), per cui nella zona di incrocio si ha una separazione del centro dei fasci tanto maggiore quanto maggiore è il campo magnetico.

Ciò che interessa è l'andamento delle orbite chiuse nella zona in cui è presente il campo magnetico assiale, cioè quella in cui avviene l'interazione dei fasci.

Per quanto riguarda le orbite chiuse in verticale non si hanno sensibili differenze rispetto al caso di incrocio ad angolo senza campo magnetico: in particolare la traiettoria dei fasci (proiettata sul piano verticale) è praticamente la stessa che nella figura 2, e l'angolo α , anche per campi elevati, varia solo di qualche %.

Sul piano radiale invece la situazione delle orbite chiuse è schematizzata dalla figura 3:

(x) - Perché, come si vede dalla fig. 2, elettroni e positroni hanno la stessa componente trasversale della velocità, e carica opposta. Il campo magnetico è uguale per ambedue i tipi di particelle, quindi la forza di Lorentz agente ha segno contrario per le due cariche.

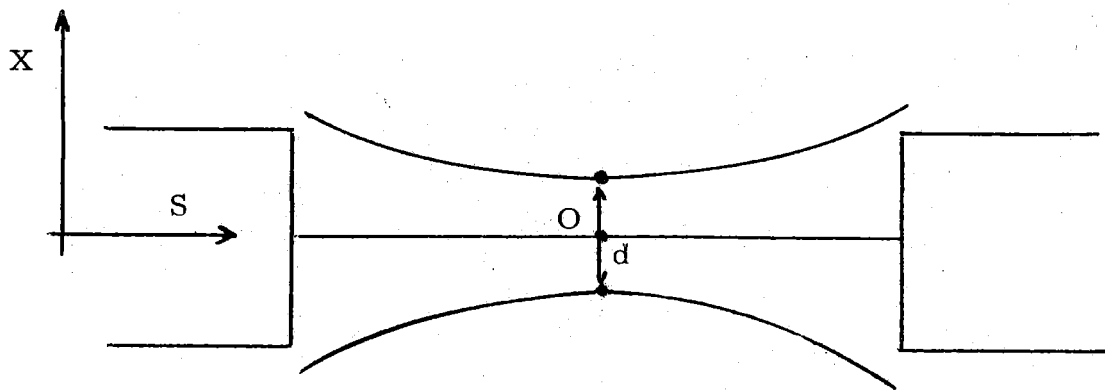


FIG. 3

O è il punto centrale della sezione dritta in cui le orbite chiuse verticali hanno scostamento nullo rispetto al piano orizzontale di riferimento.

La distanza d in funzione del campo magnetico è riportata nella ta bella I.

TAB. I

H (Kgauss)	d(mm)
1.0	0.94
2.0	1.88
3.0	2.84
5.0	4.73
10.0	9.64

Ricordando che la dimensione quadratica media radiale del fascio è dell'ordine di $2 \div 3$ mm., si vede che già per campi di qual che Kgauss non si ha praticamente incrocio.

Questa è una limitazione sostanziale, perchè limita l'intensità del campo magnetico a valori che sarebbero di scarsa utilità in molte delle esperienze in cui si voglia discriminare in momento le particelle finali della reazione.

Per tentare di eliminare questo inconveniente si possono seguire varie vie. Nel prossimo paragrafo esamineremo in dettaglio il sistema accennato nell'introduzione, che opera una compensazione in media del campo magnetico.

§ 4) -

Supponiamo di disporre due solenoidi di lunghezza $L/2$ con campo magnetico longitudinale della stessa direzione ma di verso opposto, come nel la figura 1a; oppure tre solenoidi di lunghezza e verso del campo come nel la figura 1b.

La seconda configurazione ha lo scopo di rendere libera la parte centrale della sezione dritta, cioè il volume circostante la zona di incrocio.

Molti dei risultati che daremo sono comuni alle due configurazioni, anche se non sarà detto esplicitamente; quando invece sarà necessario distinguere chiameremo a il dispositivo alla figura 1a e b quello della 1b.

Cominciamo col calcolare la matrice \bar{T} corrispondente. Questa è ovviamente il prodotto di 2 (caso a) o 3 (caso b) matrici della forma (7). Si trova lo stesso risultato per ambedue i casi:

$$\bar{T} = \begin{vmatrix} \bar{C} & \bar{S}/Q & 0 \\ -\bar{S}\cdot Q & \bar{C} & 0 \\ 0 & -\bar{S}\cdot Q & \bar{C} \\ & & \bar{S}/Q \end{vmatrix} \quad (22)$$

dove

$$\bar{C} = \cos \frac{\omega L}{2c} \quad \bar{S} = \sin \frac{\omega L}{2c}$$

e le altre notazioni invariate rispetto al § 1.

La proprietà interessante della matrice (22) è che non introduce alcun accoppiamento fra i moti radiale e verticale; cosicchè la matrice totale di macchina può scriversi:

$$\bar{M} = \bar{T} \mathcal{L}^{-1} A = \begin{vmatrix} \bar{R} & 0 \\ 0 & \bar{V} \end{vmatrix}$$

ed è lecito parlare di una matrice radiale \bar{R} e di una verticale \bar{V} .

In particolare \bar{R} e \bar{V} possono mettersi nella forma (1) in cui compariranno ora i parametri $\bar{\mu}_R$, $\bar{\alpha}_R$, $\bar{\beta}_R$, $\bar{\gamma}_R$ e così $\bar{\mu}_V$, $\bar{\alpha}_V$, $\bar{\beta}_V$, $\bar{\gamma}_V$.

Possiamo eseguire i calcoli come nei precedenti paragrafi e inoltre possiamo calcolare gli $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ che sono funzioni di s . Queste funzioni non variano di molto: in particolare $\bar{\beta}_{\max}$ aumenta di $\sim 10\%$ a 10.000 Gauss.

Il grafico 4 mostra l'andamento delle frequenze radiali e verticali.

Passiamo ora al caso di incrocio ad angolo. Abbiamo visto che non c'è accoppiamento (almeno come effetto globale) e quindi non si ha un'orbita chiusa perturbata in radiale come risultato della combinazione del campo elettrico e magnetico.

Questo in effetti è vero per tutta la macchina tranne che nella sezione dritta con i solenoidi: infatti all'interno della zona di campo magnetico l'accoppiamento c'è pur essendo nullo, come abbiamo detto, l'effetto globale. Occorre dunque esaminare l'andamento delle orbite nella sezione dritta.

Per l'orbita chiusa perturbata in verticale valgono le stesse considerazioni del paragrafo 3, cioè l'angolo di incrocio resta praticamente invariato rispetto alla situazione senza campo magnetico, e questo entro limiti ancora migliori.

Per l'orbita chiusa radiale l'andamento è raffigurato schematicamente nelle figure 4a, 4b, rispettivamente per le configurazioni a e b.

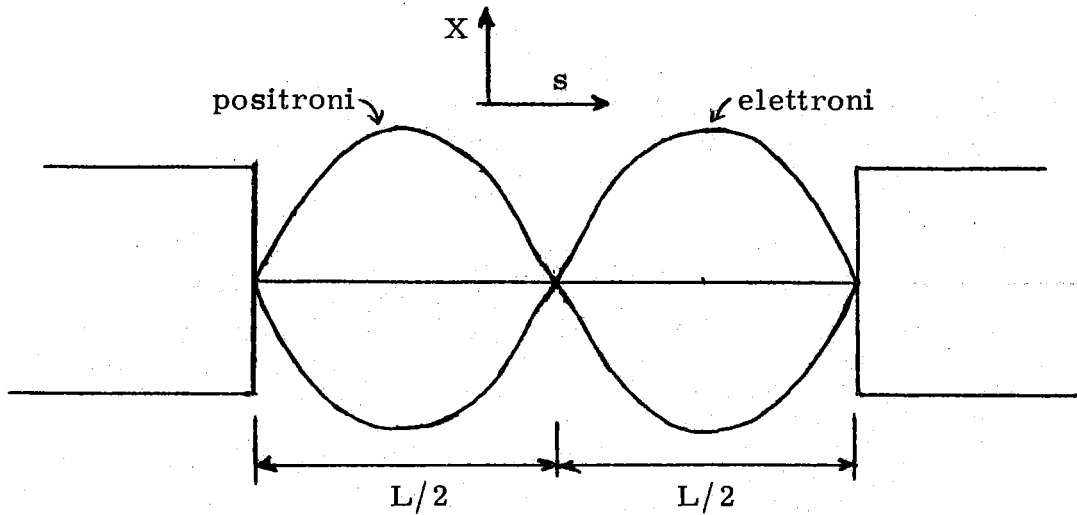


FIG. 4a)

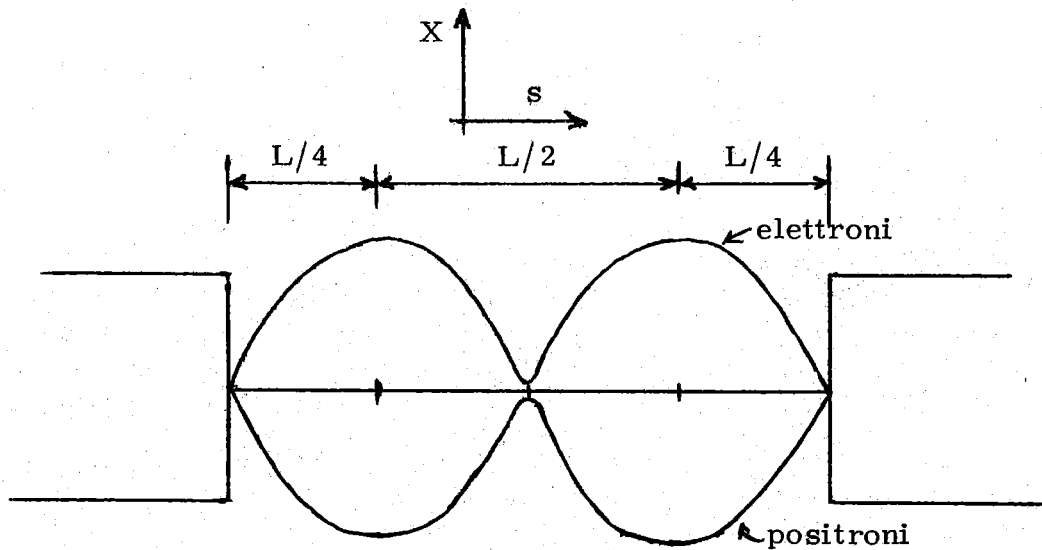


FIG. 4b)

Nel punto centrale (che è anche il punto di incrocio delle orbite chiuse verticali) non c'è dunque separazione radiale fra i fasci.

Terminiamo accennando brevemente agli effetti degli errori di allineamento dei solenoidi. Questi errori producono gli stessi effetti che l'incrocio ad angolo^(x), con l'importante differenza che le orbite chiuse vengono perturbate nello stesso modo sia che si tratti di elettroni che di positroni, per cui non si hanno effetti di separazione radiale.

Le perturbazioni alle orbite chiuse che così si introducono sono piccole, anche nel caso di solenoide unico, e gli scostamenti in posizione dall'orbita di riferimento sono modesti (qualche mm per campi di forte intensità)

(x) - Tutti questi effetti sono lineari, quindi si sommano.

cosicchè non costituiscono limitazione.

§ 5) - CONCLUSIONI -

Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti (in particolare vedi Tabella 1) con l'incrocio ad angolo l'intensità del campo magnetico permesa è molto modesta. E' quindi necessario compensare in qualche modo il cam po magnetico sul fascio.

Vogliamo qui discutere brevemente i sistemi studiati nel paragrafo 4 insieme ad altre possibilità, naturalmente trascurando quelle che annullano completamente il campo magnetico sul beam e quindi non hanno alcun effetto sulla macchina.

Per quanto riguarda le disposizioni a e b del paragrafo 4, anche se si presentano del tutto convenienti in teoria, vanno incontro a notevoli difficoltà di realizzazione pratica. Non bisogna dimenticare infatti che per ottenere un campo abbastanza uniforme e perchè l'approssimazione di lente sottile per i "fringing fields" sia buona è necessario far uso di una piastra di ferro per ogni estremità del solenoide (o dei solenoidi). Si può fare una stima dello spessore di queste piastre in funzione del campo: si vede allora che nella disposizione a) esse limitano sensibilmente la zona utile impedendo la rivela zione delle particelle attorno a 90° rispetto alla direzione dei fasci; mentre nella disposizione b, essendo tre i solenoidi, pur restando completamente libera la zona centrale l'ingombro dovuto alle piastre è veramente notevole, e tale da creare seri problemi per la disposizione degli apparati di misura.

Un altro modo per compensare il campo magnetico sull'asse è quello di disporre un secondo solenoide coassiale al primo, di diametro più piccolo, co sì da poter usare l'intercapedine tra i due per disporre gli strumenti di rivela zione delle particelle. Naturalmente occorre interrompere per un certo tratto il solenoide interno sì da permettere il passaggio delle particelle, ed in questo tratto il campo magnetico non è compensato. Gli effetti sulla macchina sono all'incirca quelli di un solenoide di lunghezza pari al tratto lasciato libero: e poichè tutti gli effetti dipendono praticamente dal prodotto (intensità del campo magnetico \times lunghezza del solenoide^(x)), si vede che il limite sulla intensità del campo può divenire ragionevolmente alto.

L'inconveniente principale di questo sistema è quello di avere un cam po disuniforme nella zona di maggior interesse per la rivelazione delle particelle, e di rendere quindi più complicate le misure di momento.

Notiamo infine che tutti i calcoli sono stati eseguiti alla massima energia (1.5 GeV): come si vede dalla (5), i risultati ottenuti saranno applicabili a valori diversi dell'energia riducendo H in modo da mantenere costante

(x) - Ricordiamo che in tutti i calcoli precedenti questa lunghezza è stata sem pre presa di 2.664 metri.

il rapporto H/E.

Ringrazio F. Amman, M. Bassetti, C. Pellegrini per continui consigli e discussioni, e M. Buohanni per l'assistenza in tutti i calcoli numerici eseguiti.

BIBLIOGRAFIA -

- (1) - E.D. Courant, H.S. Snyder, Ann. of Phys. 3, 1 (1958).
- (2) - C. Pellegrini, Nuovo Cimento 22, 603 (1961).
- (3) - F. Amman, Nota LNF - 66/6 (1966).
- (4) - L. Mango, Nota interna LNF - 65/7 (int.) (1965).

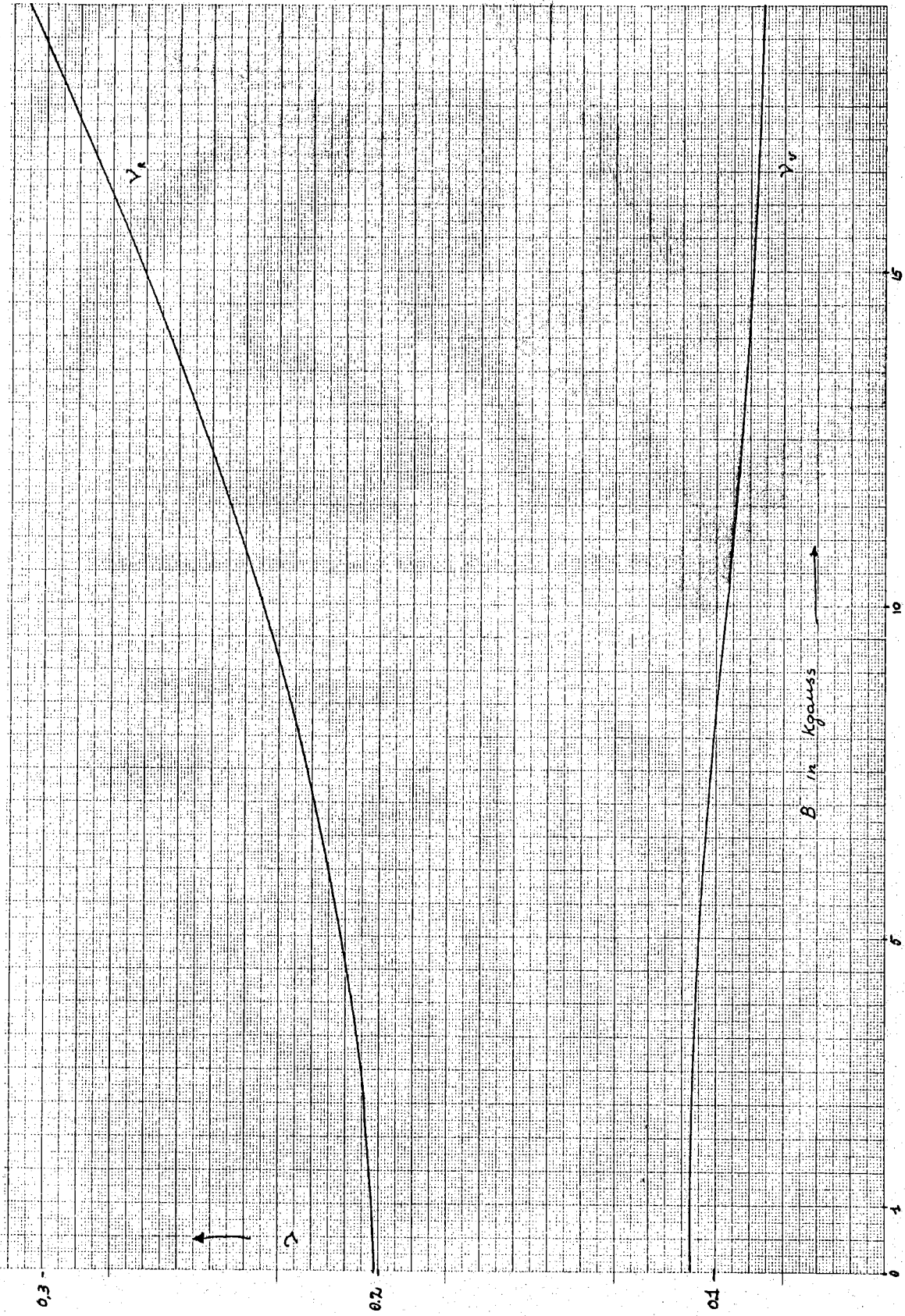


Grafico n. 1

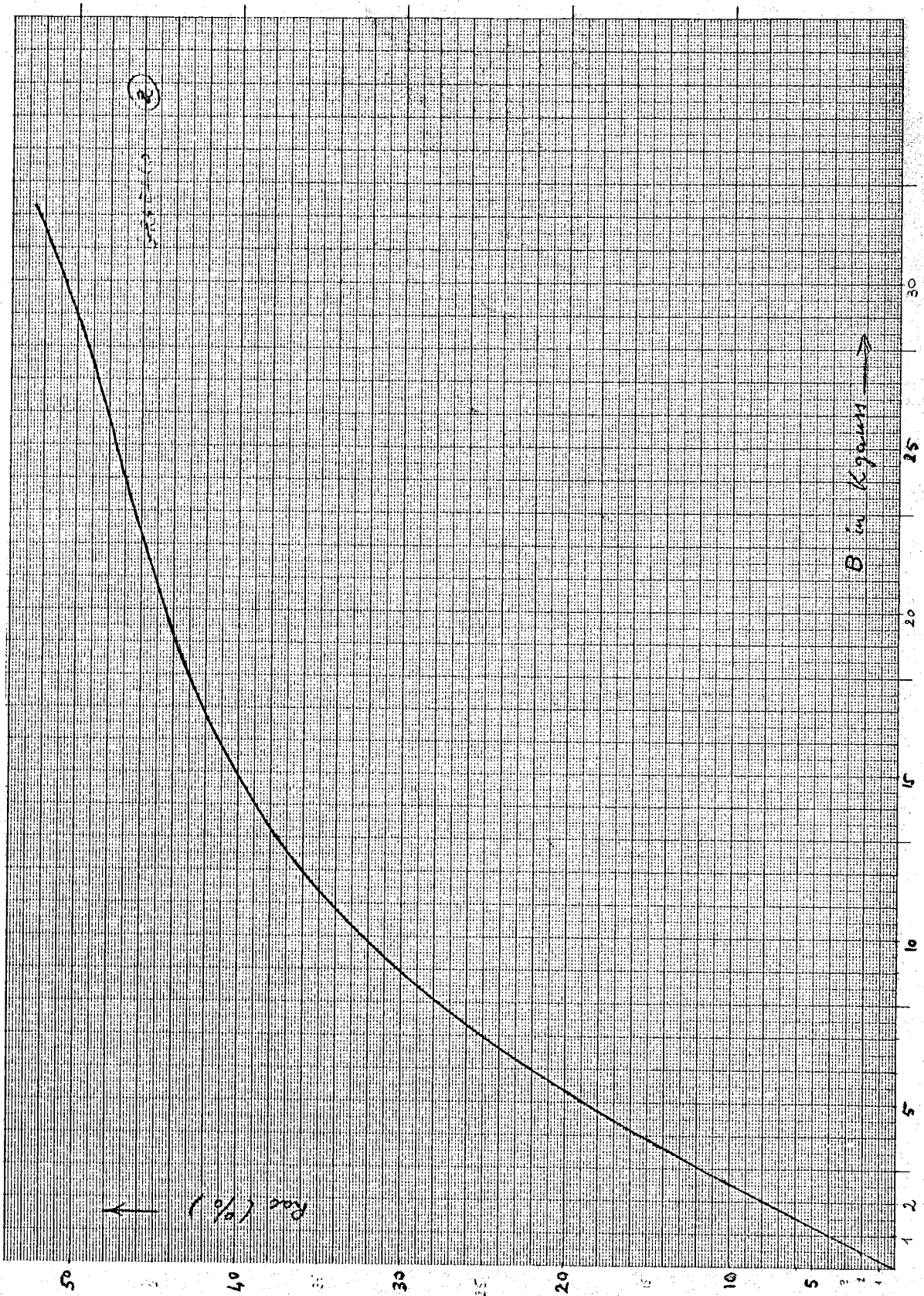


Grafico n. 2

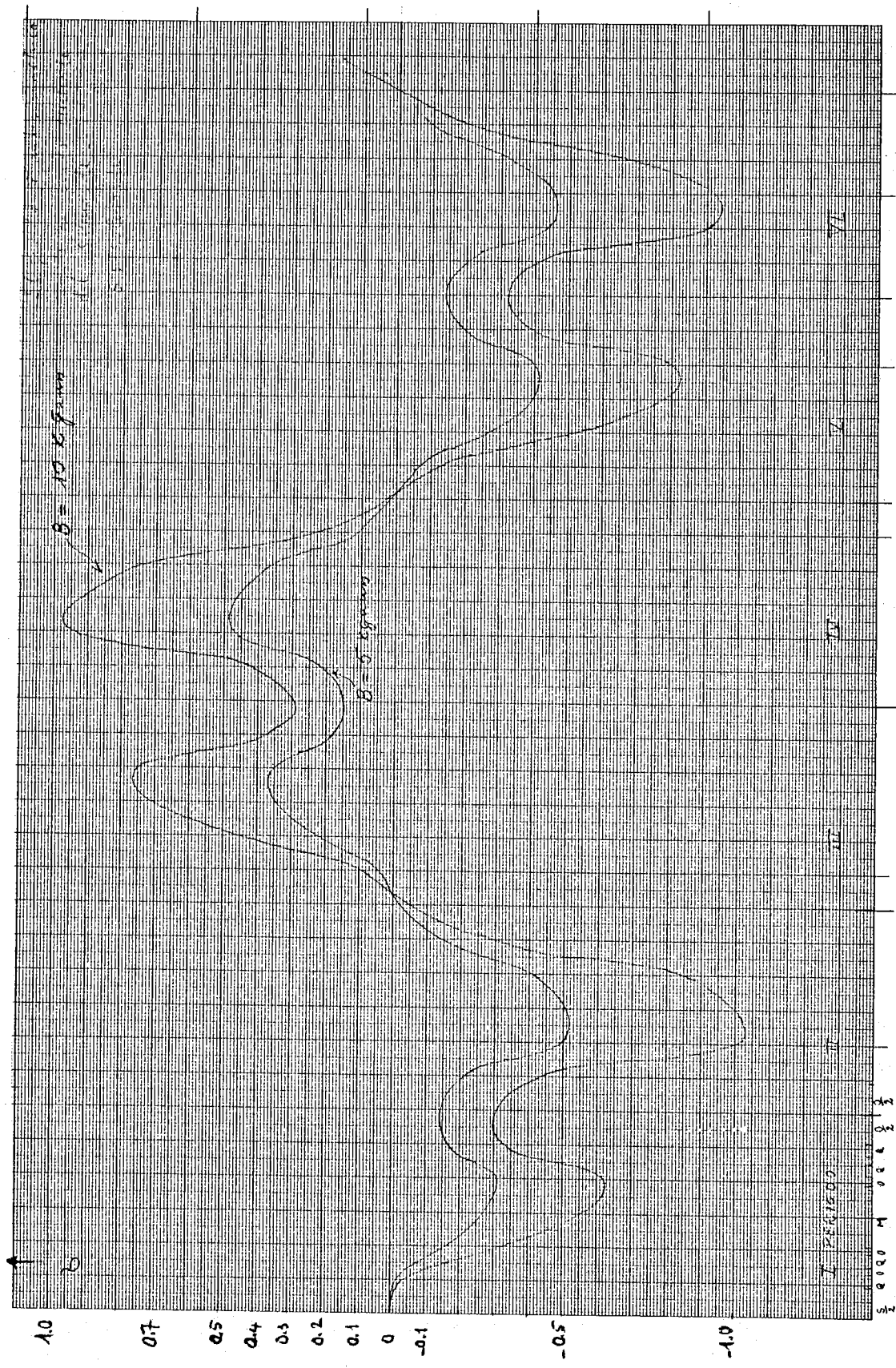


Grafico n. 3

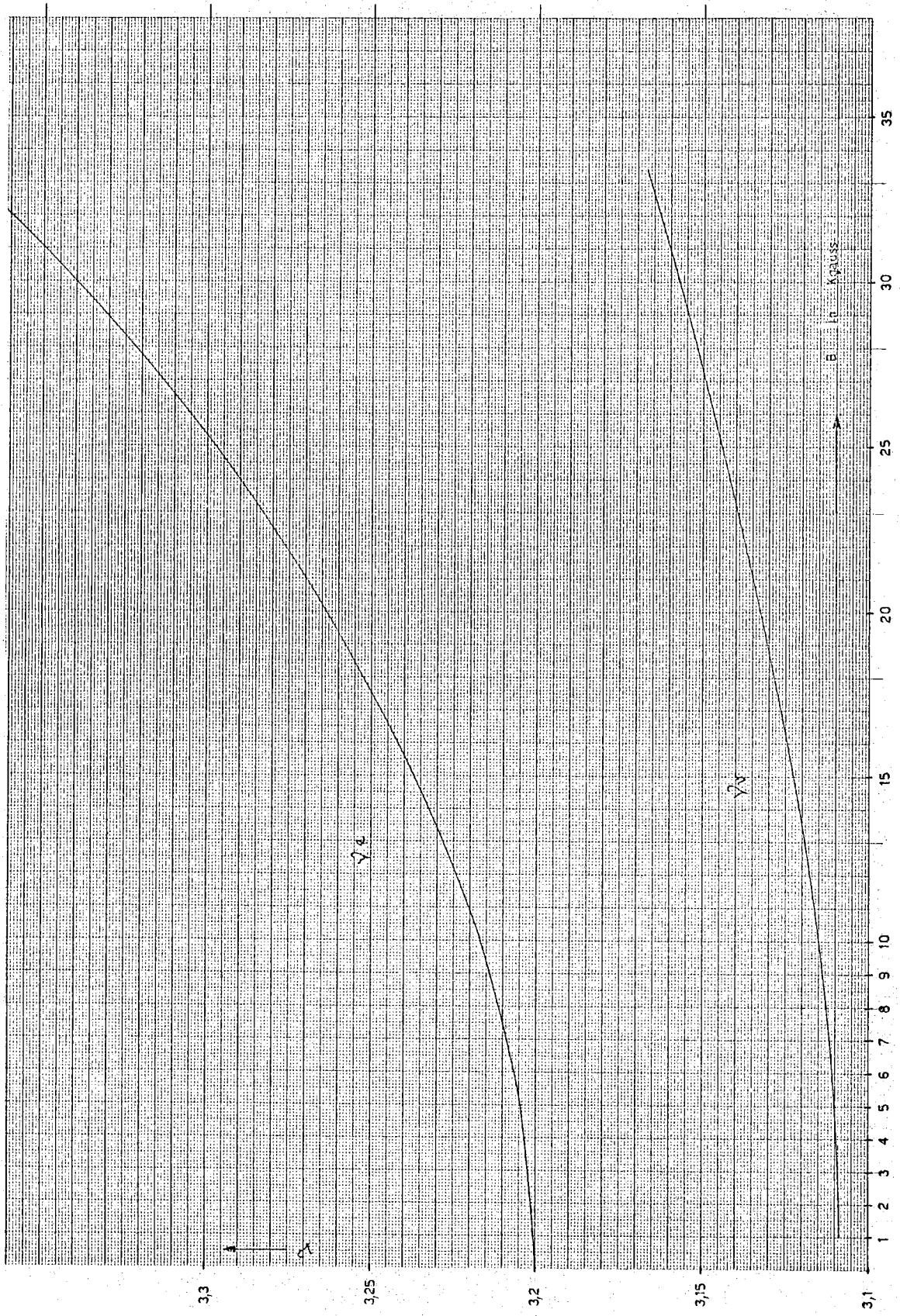


Grafico n. 4